等差数列二级结论

已知$\{a_n\}$为等差数列，若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

已知$\{a_n\}$为等差数列，则其前n项和$S_n=An^2+Bn$.

若$\{a_n\}$为等差数列，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… 也为等差数列.

若$\{a_n\}$为等差数列，则$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列.

$S_{奇}$可以化简！$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$

等比数列二级结论

已知$\{a_n\}$为等比数列，若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$. $a_1\cdot a_{11}=a_2\cdot a_{10}=a_6^2$

若$\{a_n\}$为等比数列，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… 也为等比数列. S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，…

已知$\{a_n\}$为等比数列，则S_n一定能表示为$A\cdot q^n+B$ $(A+B=0)$

数列求和：裂项相消法

$\frac{1}{a_n a_{n+k}}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+k}}\right)$ 2023.12.16 求和

次数相等

次数高→

1. $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$
2. $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$
3. $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$
4. $\frac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}\left(\sqrt{n+k}-\sqrt{n}\right)$
5. $\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$
6. $\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

$a_n=\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4n^2-1+1}{4n^2-1}$（凑分母）

$=1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$a_n=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$S_n=n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$b_n=\frac{n^2+2n+2}{n(n+1)2^{n+1}}=\frac{n^2+n+n+2}{(n^2+n)2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

公式　裂项相消

我会裂了吗？

1. 等差/等比 ⇒ 公式
2. 等差×等比 ⇒ 错位相减
3. 裂项

● 2018 全国天津

已知$c_n=\frac{n\cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$，求其前$n$项和$S_n$.

$(-1)\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+2}}{n+2}\right)$

$=(-1)\frac{(n+2)\cdot 2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$

$=(-1)\frac{-n\cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$

● 2023 新疆模拟

已知$b_n=\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$，求证：$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n<1$.

$=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$T_n=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$=$

奕闻 yweven

机灵小测试，我学会了吗？ $e^{\ln x}=x$

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

$a_{n+1}-1=(a_n-1)^2$

取ln $\ln(a_{n+1}-1)=2\ln(a_n-1)$

b_{n+1} b_n

$\{b_n\}$为等比数列，公比为2，首项$\ln 2$

$b_n=(\ln 2)\cdot 2^{n-1}=\ln(a_n-1)$

$e^{(\ln 2)\cdot 2^{n-1}}=a_n-1=(e^{\ln 2})^{2^{n-1}}=2^{2^{n-1}}$

解得 $a_n=2^{2^{n-1}}+1$

数列中的不等式证明

● 放缩成等比数列（四川高考）

已知数列$e_n=\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^{2(n-1)}}$，证明：$e_1+e_2+\ldots+e_n>\frac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$.

$e_n=\sqrt{1+(\frac{4}{3})^{2(n-1)}}>\sqrt{(\frac{4}{3})^{2(n-1)}}=(\frac{4}{3})^{n-1}$

$e_1+e_2+\cdots+e_n>(\frac{4}{3})^0+(\frac{4}{3})^1+(\frac{4}{3})^2\cdots(\frac{4}{3})^{n-1}$

$=\frac{1\cdot(1-(\frac{4}{3})^n)}{1-\frac{4}{3}}=\frac{4^n-3^n}{3^{n-1}}$

● 放缩成错位相减（天津高考）

已知$p_n=\sqrt{\frac{4n^2-1}{2(4^n)}}$，证明：$p_1+p_2+\ldots+p_n<2\sqrt{2}$.

$p_n<\sqrt{\frac{4n^2}{2\cdot 4^n}}=\sqrt{2}\cdot n\cdot(\frac{1}{2})^n$ 错位相减

$(2^n)^2$

● 放缩成裂项相消

已知$p_n=\frac{16n^4}{64n^4-16n^2+1}$，证明：$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n<\frac{2n+1}{8}$.

$p_n<\frac{16n^4}{64n^4-16n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4n^2-1+1}{4n^2-1}=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)})$

$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}))=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$p_1+p_2+\cdots+p_n<\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{2n+1})$

$<\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}$

$=\frac{2n+1}{8}$

数列与放缩美美实战

$\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$前100项和 $24.2<\bigcirc<24.5$

已知$\{a_n\}$是正实数数列，$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n\geq 1)$，求$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{100}}$的整数部分. $S_n=\sqrt{n}$

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{101}-\sqrt{100})<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}<1+2(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$2(\sqrt{101}-1)$ $18.xx\Rightarrow 18$ $1+2(9)$

$18.xx$ $19.xx\Rightarrow 19$ 19

● 2018 北京大学综合营试题

奕闻 yweven

放缩成裂项相消的一些特殊技巧

01 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

02 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

03 $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

放缩成等比数列的一些特殊技巧

● 证明：$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\ldots+\frac{2}{3^n-1}<\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{2+1}{3^n-1+1}=\frac{3}{3^n}=(\frac{1}{3})^{n-1}$

原式 $<(\frac{1}{3})^0+(\frac{1}{3})^1+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-(\frac{1}{3})^n)<\frac{3}{2}$

$n\in N^*$

☆ $\frac{2}{3^n-1}\le\frac{2}{3^n-3^{n-1}}$

↓ 大

$\frac{2}{3\cdot3^{n-1}-3^{n-1}}$

$\frac{2}{2\cdot3^{n-1}}$

$(\frac{1}{3})^{n-1}$

● 证明：$\frac{2}{3^1-1}+\frac{2}{3^2-1}+\ldots+\frac{2}{3^n-1}<\frac{11}{8}$

① 选择更精确的不等式

② 保留前n项

$\frac{2}{3^n-1}\le\frac{2}{3^n-3^{n-2}}=\frac{2}{3^2\cdot3^{n-2}-3^{n-2}}=\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{3})^{n-2}$ ($n\ge2$成立)

原式 $<1+\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{3})^0+\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^1+\cdots+\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^{n-2}$

$=1+\frac{1}{4}\left(\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{3})^{n-1})}{1-\frac{1}{3}}\right)=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}(1-(\frac{1}{3})^{n-1})<1+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$

遇见摸不着头脑的放缩怎么办

证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}=b_1+b_2+\cdots+b_n$

a_1 a_2 a_n $f(n)$

S_n T_n

要证 $a_n>b_n=T_n-T_{n-1}$ ($n\ge2$)

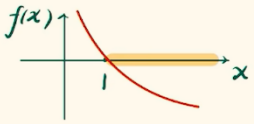
即证 $\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}-\ln n-\frac{n-1}{2n}$

即证 $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{2}{2n}-\frac{n}{2(n+1)}+\frac{n-1}{2n}=\frac{n+1}{2n}-\frac{n}{2(n+1)}$

$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}=x>1$; $\frac{n+1}{2n}=x$; $\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{x}$

即证 $\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ ↓

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$



$f(1)=\ln1-\frac{1}{2}(1-1)=0$

当 $n=1$，$1>\ln2+\frac{1}{4}\approx0.69+0.25$

证毕

● 2010 湖北高考

奕闻 yweven

必做第四题：数列不等式证明「通项比较法」

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且S_1，S_2，S_3+3成等比数列.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$\{a_n\}$是单调递增数列，求证：$\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{a_n}}<\sqrt{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$

前n项和　某个数列的前n项和　$f(n)$　T_n　$=b_1+b_2+\cdots+b_n$

(Ⅱ) $a_n=n$

$\sqrt{\frac{1}{a_n}}=\sqrt{\frac{1}{n}}$

只要证：$\sqrt{\frac{1}{a_n}}<b_n=T_n-T_{n-1}\ (n\geq 2)$

即证：$\sqrt{\frac{1}{n}}<\sqrt{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)-\sqrt{n-1}\left(1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$

即证：$\sqrt{\frac{1}{n}}<\sqrt{n}+\frac{n}{\sqrt{n+1}}-\sqrt{n-1}-\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$

即证：$\sqrt{n-1}<\frac{n}{\sqrt{n+1}}$

即证：$\sqrt{n^2-1}<n=\sqrt{n^2}$

证毕

当$n=1$时，$1<1+\sqrt{2}$显然成立.

● 2021 浙江期中

数列与放缩激情挑战

已知曲线$C_n:x^2-2nx+y^2=0(n=1,2,\cdots)$，从点$P(-1,0)$向曲线$C_n$引斜率为$k_n(k_n>0)$的切线$l_n$，切点为$P_n(x_n,y_n)$.

（1）求数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的通项公式；

（2）证明：$x_1x_3x_5\cdots x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}$.

100+

$\sqrt{\frac{1-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n}{n+1}}}=\sqrt{\frac{n+1-n}{n+1+n}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$k_n=\tan\alpha=\frac{n}{\sqrt{2n+1}}=\frac{y_n}{x_n+1}$

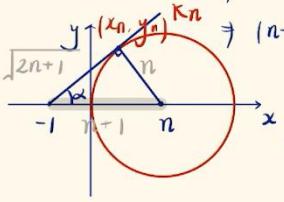
$x_n^2-2nx_n+y_n^2=0\Rightarrow x_n^2-2nx_n+\frac{n^2(x_n^2+2x_n+1)}{2n+1}=0$

$\Rightarrow(2n+1)x_n^2-(4n^2+2n)x_n+n^2x_n^2+2n^2x_n+n^2=0$

$\Rightarrow(n+1)^2x_n^2-2n(n+1)x_n+n^2=0$

$((n+1)x_n-n)^2=0$

$\Rightarrow x_n=\frac{n}{n+1}$，$y_n=\frac{n\sqrt{2n+1}}{n+1}$



$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdots x_{2n-1}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdots b_n$　$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$

T_n　b_n

只要证 $x_{2n-1}<b_n$

$T_n-T_{n-1}\ (n\geq 2)$

即证 $\frac{2n-1}{2n}<\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\Leftrightarrow\frac{(2n-1)^2}{4n^2}<\frac{2n-1}{2n+1}$

$\Leftrightarrow 4n^2>4n^2-1\Leftrightarrow 0>-1$

$n=1$时，$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$符合题意

只要证 $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

只要证 $t<\sqrt{2}\sin t$，$t\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$

● 2009 广东高考

数列与放缩激情挑战

已知曲线$C_n:x^2-2nx+y^2=0(n=1,2,\cdots)$，从点$P(-1,0)$向曲线$C_n$引斜率为$k_n(k_n>0)$的切线$l_n$，切点为$P_n(x_n,y_n)$.

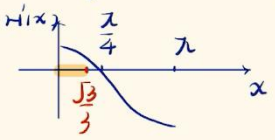
（1）求数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的通项公式；

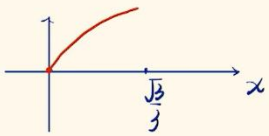
（2）证明：$x_1x_3x_5\cdots x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}$.　$\frac{1.732}{3}=0.57$

只要证 $t<\sqrt{2}\sin t$，$t\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$

$H(x)=\sqrt{2}\sin x-x$，$x\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$

$H'(x)=\sqrt{2}\cos x-1\Rightarrow H(x)\uparrow$





$H(x)>H(0)=0$

证毕

● 2009 广东高考

奕闻 yweven

数列多模块综合问题，难度四颗星

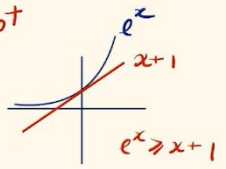
120+

已知函数 $f(x)=(1-x)e^x-1$.

（Ⅰ）证明：当 $x>0$ 时，$f(x)<0$；

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 且 $x_1=1$，证明：数列 $\{x_n\}$ 单调递减且 $x_n\geq\frac{1}{2^{n-1}}$.

$x_1\to x_2\to x_3\to\cdots\to x_n\to\cdots$



$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$，

$e^{x_2}=\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>\frac{x_1+1-1}{x_1}=1\Rightarrow x_2>0$

$e^{x_3}=\frac{e^{x_2}-1}{x_2}>\frac{x_2+1-1}{x_2}=1\Rightarrow x_3>0$

$\vdots$

$x_n>0$

只要证 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}<e^{x_n}$

$\Leftrightarrow e^{x_n}-1<x_n e^{x_n}$

$\Leftrightarrow (1-x_n)e^{x_n}-1<0$

只要证 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_{n+1}\geq\frac{1}{2}x_n\Leftrightarrow e^{x_{n+1}}\geq e^{\frac{1}{2}x_n}$

即证 $\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\geq e^{\frac{1}{2}x_n}\Leftrightarrow\frac{e^{x_n}-1}{e^{\frac{1}{2}x_n}}\geq x_n$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x_n}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x_n}}\geq x_n$



设 $e^{\frac{1}{2}x}=t\Rightarrow\frac{1}{2}x=\ln t\Rightarrow x=2\ln t$

$\Leftrightarrow t-\frac{1}{t}\geq 2\ln t\Leftrightarrow\ln t\leq\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$

$\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\frac{x_4}{x_3}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}\geq(\frac{1}{2})^{n-1}\Leftrightarrow x_n\geq(\frac{1}{2})^{n-1}$

● 2013 清华大学自主招生

奕闻 yweven