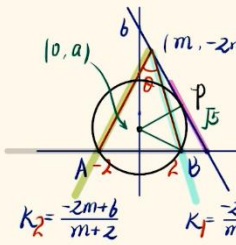
妖魔小试

已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 P 为直线 $l:2x+y-6=0$ 上动点，当 $\angle APB$ 最大时，点 P 的坐标为 $(2,2)$.



<法一> 到角公式

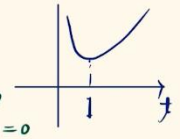
$\tan\theta=\dfrac{\frac{-2m+6}{m-2}-\frac{-2m+6}{m+2}}{1+\frac{(-2m+6)^2}{(m+2)(m-2)}}=\dfrac{(-2m+6)(m+2-(m-2))}{m^2-4+(4m^2-24m+36)}=\dfrac{8(-m+3)}{5m^2-24m+32}$

$m=3-t$，分讨论 $0<m<3$ 与 $0<t<3$

$\dfrac{8t}{5(3-t)^2-24(3-t)+32}=\dfrac{8t}{5t^2-6t+5}=\dfrac{8}{5t+\frac{5}{t}-6}$

$k_2=\dfrac{-2m+6}{m+2}$　$k_1=\dfrac{-2m+6}{m-2}$

<法二> 切割找点证



$\dfrac{|a^2+4|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{|a-6|}{\sqrt{4+1}}$　$a^2+3a-4=0$　$(a+4)(a-1)=0$

$3a^2+20=(a^2-12a+36)$　$a=1$ 或 -4

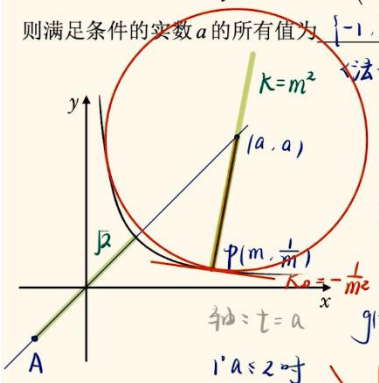
$4a^2+12a-16=0$

● 2025 福建月考 ★★★☆

妖魔小试

在平面直角坐标系 xOy 中，设定点 $A(a,a)$，P 是函数 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ 图象上一动点，若点 P，A 之间的最短距离为 $2\sqrt{2}$，则满足条件的实数 a 的所有值为 $\{-1,\sqrt{10}\}$

$(m+\frac{1}{m})^2=m^2+\frac{1}{m^2}+2$　$y'=-\frac{1}{x^2}$



<法一> 代数法

$(a-m)^2+(a-\frac{1}{m})^2$ min $=8$

$m^2-2am+a^2+a^2+\frac{1}{m^2}-\frac{2a}{m}$

$m^2+\frac{1}{m^2}-2a(m+\frac{1}{m})+2a^2$

t^2-2　$t\geq 2$

$\begin{cases} y-\frac{1}{m}=m^2(x-m) \\ y=x \end{cases}$

$\Rightarrow x-\frac{1}{m}=m^2(x-m)$

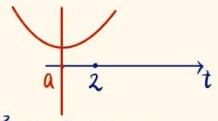
$(m^2-1)x=m^3-\frac{1}{m}=\frac{m^4-1}{m}$

$x=y=\frac{m^2+1}{m}$　$\Rightarrow a=m+\frac{1}{m}=\sqrt{10}$

$(\frac{1}{m})^2+m^2=8$

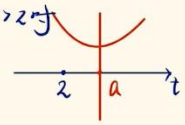
轴 $=t=a$　$g(t)=t^2-2at+2a^2-2$ 在 $t\in[2,+\infty)$ 的最小值为 8

1° $a\leq 2$ 时



$4-4a+2a^2-2=8\Rightarrow a=-1$

2° $a>2$ 时



$a^2-2=8$

$a=\pm\sqrt{10}$

● 2013 江苏高考 ★★★★

弦长问题

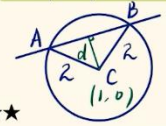
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{4-d^2}\times d=\frac{8}{5}\Rightarrow d\Rightarrow m$

● 2023 新高考二卷 ★★★☆

已知直线 $x-my+1=0$ 与 $\odot C:(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，写出满足“$\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$”的 m 的一个值_____.



$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin C=\frac{8}{5}\Rightarrow\sin C=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos C=\pm\frac{3}{5}=2\cos^2\frac{C}{2}-1$

$\cos\frac{C}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{d}{2}\Rightarrow d=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\Rightarrow m=\pm 2,\pm\frac{1}{2}$

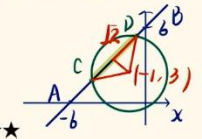
$y=x+b$ 天津高考

● 2025 西安模拟 ★★★

$l_1:x-y+6=0$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，与圆 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2\ (r>0)$ 交于 C，D 两点，$|AB|=3|CD|$，则 $r=$ _____.

$r=2$

$\frac{|-1-3+6|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

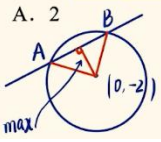


$CD=2\sqrt{2}$

● 2024 全国甲卷 ★★★

已知直线 $ax+by-a+2b=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为（ C ）

A．2　B．3　C．4　D．6



$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}}\Rightarrow 1$　$b=0$

$a(x-1)+b(y+2)=0\Rightarrow(1,-2)$

$x^2+(y+2)^2=5$

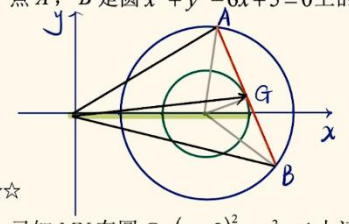
奕闻 yweven

弦长问题进阶

● 2016 上海高考 ★★★

在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B 是圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 上的两个动点，且满足 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$ 的最小值为____4____.

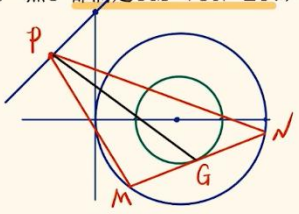
$(x-3)^2+y^2=4$　　$2|\overrightarrow{OG}|$



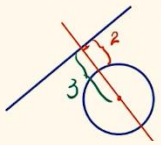
● 2020 江苏模拟 ★★★☆

在平面直角坐标系 xOy 中，已知 MN 在圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 上运动，且 $MN=2\sqrt{3}$．若直线 $l:kx-y+3=0$ 上的任意一点 P 都满足 $PM^2+PN^2\geq 14$，则实数 k 的取值范围是__$[0,\frac{12}{5}]$__.

$y=kx+3$



$2(PG^2+MG^2)\geq 14 \Rightarrow PG^2\geq 4 \Rightarrow PG\geq 2$　　min



$(2,0)$ 到 l 的距离 ≥ 3

$\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}\geq 3$

$4k^2+12k+9\geq 4k^2+9$

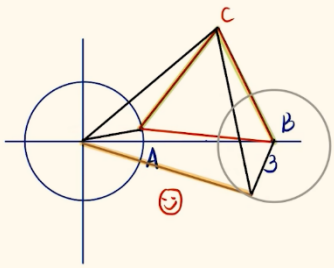
$5k^2-12k\leq 0$

$k(5k-12)\leq 0$



邪门套路，能识别否？

在平面直角坐标系 xOy 中，动点 A 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 B 的坐标为 $(3,0)$，若存在点 C 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $|OC|$ 的最大值为_____.

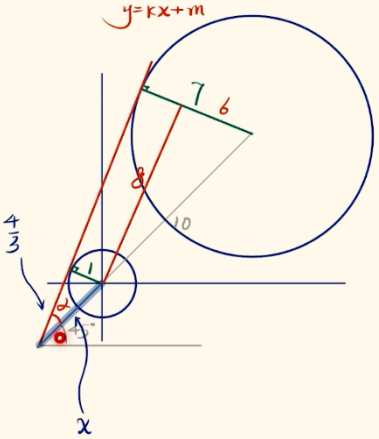


● 2019 南通期末 ★★★★

相切问题

在平面直角坐标系 xOy 中，若直线 l 与圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 和圆 $C_2:(x-5\sqrt{2})^2+(y-5\sqrt{2})^2=49$ 都相切，且两个圆的圆心均在直线 l 的下方，则直线 l 的斜率为_____.

$y=kx+m$



〈法一〉 $y-kx-m=0$

$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

$\frac{|5k-5\sqrt{2}k-m|}{\sqrt{k^2+1}}=7$

〈法二〉

$\frac{1}{7}=\frac{x}{10+x} \Rightarrow 10+x=7x \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$\tan\alpha=\frac{3}{4}$

$k=\tan(45°+\alpha)$

$=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-1\times\frac{3}{4}}$

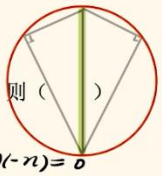
$=7$

● 2017 南通模拟 ★★★☆

奕闻 yweven

双切线问题

由直线 $l: x-y+1=0$ 上的一点 P 向圆 $C: x^2-6x+y^2+8=0$ 引两条切线 PA，PB，A，B 是切点，则（　　）

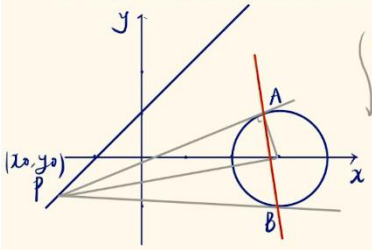


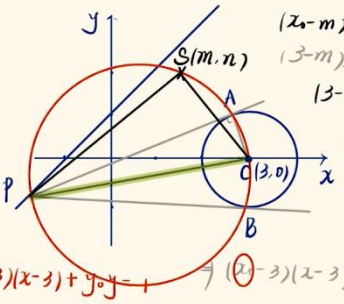
Ⓐ 线段 PA 长的最小值为 $\sqrt{7}$

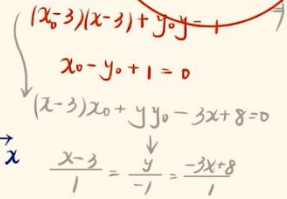
Ⓑ 四边形 $PACB$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Ⓒ $\cos\angle APB$ 的最小值是 $\frac{3}{4}$

- D．切点弦 AB 恒过点 $\left(\frac{11}{4},\frac{1}{4}\right)$
- E．$\triangle PAB$ 的外接圆恒过两个定点







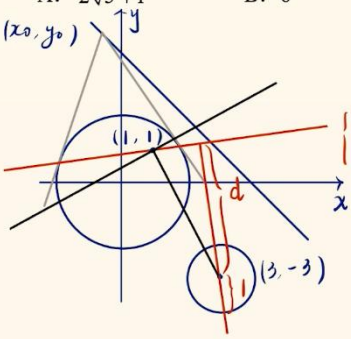
● 2026 小猪改编 ★★★★

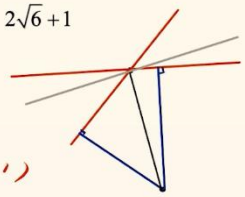
双切线问题

● 2026 湖北模拟 ★★★

过直线 $x+y=4$ 上一动点 M，向圆 $O: x^2+y^2=4$ 引两条切线，A、B 为切点，则圆 $C: (x-3)^2+(y+3)^2=1$ 的动点 P 到直线 AB 距离的最大值为（ A ）

A．$2\sqrt{5}+1$　　B．6　　C．8　　D．$2\sqrt{6}+1$





双切线问题

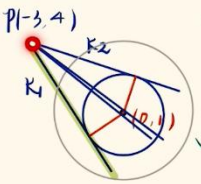
● 2026 湖北模拟 ★★★

过直线 $x+y=4$ 上一动点 M，向圆 $O: x^2+y^2=4$ 引两条切线，A、B 为切点，则圆 $C: (x-3)^2+(y+3)^2=1$ 的动点 P 到直线 AB 距离的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{5}+1$　　B．6　　C．8　　D．$2\sqrt{6}+1$

● 2025 安徽期中 ★★★

圆 $C: x^2+(y-1)^2=r^2\ (0<r<3)$，点 $P(-3,4)$，过点 P 作圆 C 的两条切线，分别与圆 C 切于 M、N 两点，则直线 PM、PN 的斜率之积为_____.



奕闻 yweven